Уточненные соотношения для оценки рыночной арендной платы за пользование земельным участком

Н.П. Баринов
директор по научно-методической работе консалтинговой группы «Аверс», доцент, кандидат технических наук (г. Санкт-Петербург)
М.М. Русанов
руководитель проектов по оценке консалтинговой группы «Аверс» (г. Санкт-Петербург)

Николай Петрович Баринов, n.barinov@avg.ru

В публикации [1] * автором не была завершена работа по упрощению полученных математических выражений для расчета величины ставки текущей доходности, используемой при определении величины рыночной арендной платы за первый год договора аренды. В работе были представлены довольно громоздкие точные соотношения для общего случая и простые приближенные – для долгосрочных договоров, полученные предельными переходами при допущении о сроках действия договора, близких бесконечным.

Внимательный анализ полученных точных соотношений с последующим математическим их упрощением выявил избыточность таких допущений. Покажем это.

1. Постоянные во времени арендная плата и стоимость актива

Для этого случая в работе [1] получены следующие выражения для ставки текущей доходности Y_0^t:

а) точное для *обычного* аннуитета $a(Y,n,0)$:

$$Y_0^t = [1 - (1 + Y)^{-n}] / \{[1 - (1 + Y)^{-n}] / Y\} = Y, \qquad (8)^1$$

где Y – ставка конечной доходности, признаваемая рынком для сдачи земли в аренду;
n – срок использования арендуемого земельного участка;

б) точное для *авансового* аннуитета $a(Y,n,1)$:

$$Y_0^t = Y [1 - (1 + Y)^{-n}] / [1 + Y - (1 + Y)^{-(n-1)}], \qquad (8')$$

а также простое приближенное выражение для *долгосрочных* ($n \geq 20 - 25$ лет) договоров:

$$Y_0^t \approx Y / (1 + Y). \qquad (8'')$$

При ближайшем рассмотрении выражение (8’) может быть упрощено. Если умножить его числитель и знаменатель на $(1 + Y)$ и провести необходимые преобразования, то получим простое *точное* соотношение:

$$Y_0^t = [Y / (1 + Y)] \times [1 - (1 + Y - (1 + Y)^{-(n-1)}] / [1 + Y - (1 + Y)^{-(n-1)}] = Y / (1 + Y). \qquad (8')$$

* К которой мы отсылаем заинтересованного читателя по всем нераскрытым здесь вопросам и подробностям.

[1] Для удобства сопоставления «старых» и новых соотношений сохранена нумерация формул публикации [1].

Как видим, выражение (8’) для авансовых платежей является точным независимо от срока действия договора аренды.

Для платежей, позиционированных *на середину периода*, ставку доходности можно определить как *среднегеометрическо*е значение ставок для «обычных» и авансовых платежей:

$$Y_0^t = [Y \times Y / (1 + Y)]^{0,5} = Y / (1 + Y)^{0,5}. \qquad (8'''')$$

Заметим, что это соотношение также является *точным* независимо от срока действия договора в отличие от полученного в [1] приближенного соотношения для *долгосрочных* договоров как среднее арифметическое ставок:

$$Y_0^t \approx 0,5 \times [Y + Y / (1 + Y)] = Y \times (1 + 0,5Y) / (1 + Y). \qquad (8''')$$

Значения ставок текущей доходности, рассчитанные по «старому» выражению (8’’’) и новому (8’’’’), отличаются друг от друга не более чем на 0,6 процента в интервале значений ставки дисконта Y = 0,1–0,2. Но среднегеометрическое значение (8’’’’) имеет преимущество в простоте выражения и «привычности» использования оценщиками аналогичного «дисконтного знаменателя» при дисконтировании потоков, позиционированных на середину периода.

2. Учет роста стоимости актива во времени при постоянной арендной плате

Выражения для ставки текущей доходности в этом варианте динамики доходов также могут быть упрощены посредством вычисления отношения ставок, полученных в [1] по выражениям (9) и (7), а не их разности. Опуская несложные промежуточные выкладки, запишем общее выражение для ставки текущей доходности:

$$Y_{0g}^t = Y_0^t \times \{1 - [1 - (1 + g)^n] / [1 - (1 + Y)^n]\},$$

где g – среднегодовой темп удорожания арендуемого земельного участка.

С учетом уточненных выражений (8), (8’) и (8’’’’) для Y_0^t получаем *точные* соотношения при любых значениях срока договора с *постоянной* арендной *платой* в условиях *растущей стоимости* актива:

для платежей на конец года:

$$Y_{0g}^t = Y \times \{1 - [1 - (1 + g)^n] / [1 - (1 + Y)^n]\}; \qquad (10')$$

для авансовых платежей:

$$Y_{0g}^t = [Y / (1+Y)] \times \{1 - [1 - (1+g)^n] / [1 - (1+Y)^n]\}; \qquad (10'')$$

для платежей, позиционированных на середину периода:

$$Y_{0g}^t = [Y / (1 + Y)^{0,5}] \times \{1 - [1 - (1 + g)^n] / [1 - (1 + Y)^n]\}. \qquad (10''')$$

3. Арендная плата и стоимость актива, изменяющиеся с одинаковыми среднегодовыми темпами *g*

Для этой наиболее распространенной на практике динамики потока доходов в [1] получено следующее точное выражение для дисконтирования дохода, получаемого *в конце периода*:

$$Y_g^{\,t} = \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+Y)^n}\right) \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+Y)^k}. \tag{12}$$

Если присмотреться внимательнее к знаменателю формулы (12), то можно заметить, что он представляет собой сумму конечной геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1 / (1 + Y)$ и знаменателем $q = (1 + g) / (1 + Y)$. Убедимся в этом.

Любой член геометрической прогрессии выражается как $b_n = b_1 \times q^{n-1}$. Отсюда:

$b_2 = b_1 \times q^1 = [1 / (1 + Y)] \times (1 + g) / (1 + Y) = (1 + g) / (1 + Y)^2$,

$b_3 = b_1 \times q^2 = [1 / (1 + Y)] \times (1 + g)^2 / (1 + Y)^2 = (1 + g)^2 / (1 + Y)^3$, и т. д., что полностью соответствует выражению знаменателя формулы (12).

Общая формула суммы геометрической прогрессии записывается так:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{b_1 \times (1 - q^n)}{1 - q}.$$

В нашем случае эта сумма равна:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+g)^{k-1}}{(1+Y)^k} = \sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{1+Y}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n\right]}{1 - \frac{1+g}{1+Y}} = \frac{\frac{1}{1+Y}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n\right]}{\frac{1+Y-1-g}{1+Y}} = \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n}{Y - g}.$$

С учетом этого результата выражение (12) *для платежей в конце периода* после сокращения числителя и знаменателя на общий множитель $1 - [(1 + g) / (1 + Y)]^n$ принимает вид *точного* равенства справедливого *для любого значения n*:

$$Y_g^{\,t} = 1 / (Y - g)^{-1} = Y - g. \tag{16}$$

Чтобы получить точное выражение для ставки текущей доходности в случае *платежей в начале периода* нам нужно вернуться к равенству стоимости земельного участка приведенной сумме арендных платежей за него (аналогичного выражению (11) в [1]). В рассматриваемом случае оно модифицируется следующим образом:

$$NPV = -V_0 + A + A\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^k + V_0\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n = 0, \tag{11'}$$

где *A* – годовой арендный платеж в начале первого года договора.

Выражение (12) соответствующим образом приводится к виду:

$$Y_g^{\,t} = \left[1 - \left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n\right] \Bigg/ \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^k\right]. \tag{12'}$$

Знаменатель $1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^k$ в (12’) может быть представлен эквивалентным

выражением $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^{k-1}$, так как можно записать $1 = (1 + g)^0 / (1 + Y)^0$.

Чтобы использовать полученные выражения для суммы членов геометрической прогрессии, перепишем выражение (12’) в форме, содержащей аналогичный (12) элемент знаменателя:

$$Y_g{}^t=\left[1-\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n\right]\Big/(1+Y)\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+g)^{k-1}}{(1+Y)^k}. \qquad (12'')$$

Подставляя в (12’’) выражение для суммы членов геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+g)^{k-1}}{(1+Y)^k}=\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n}{Y-g}$, и сокращая числитель и знаменатель на общий член $1 - (1 + g)^n / (1 + Y)^n$, получаем после необходимых преобразований простое *точное* выражение ставки для случая *авансовых платежей*:

$$Y_g^t = (Y - g) / (1 + Y). \qquad (12''')$$

Заметим, что полученное здесь выражение отличается от полученного в [1] «по аналогии» приближенного выражения (16’) $Y_g^t \approx Y / (1 + Y) - g = (Y - g) / (1 + Y) - Y \times g / (1 + Y)$, которое дает несколько заниженные значения ставки текущей доходности для долгосрочных договоров.

Для платежей, позиционированных *на середину года*, уравнение (11’) записывается так:

$$NPV=-V_0+\frac{A}{(1+Y)^{0,5}}+A\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1+g)^k}{(1+Y)^{k+0,5}}+V_0\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n=0. \qquad (11'')$$

Выполняя преобразования, аналогичные проведенным выше, получаем $Y_g{}^t=\left[1-\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n\right]\Big/\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+g)^{k-1}}{(1+Y)^{k-0,5}}$ или $Y_g{}^t=\left[1-\left(\frac{1+g}{1+Y}\right)^n\right]\Big/\left[(1+Y)^{0,5}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+g)^{k-1}}{(1+Y)^k}\right]$, откуда с учетом приведенной замены суммы членов геометрической прогрессии на отношение (см. перед формулой (12’’’) следует точное равенство:

$$Y_g^t = (Y - g) / (1 + Y)^{0,5}. \qquad (12'''')$$

Этот же результат можно получить, определяя ставку доходности для платежей *на середину года* как среднегеометрическое значение ставок для «обычных» (16) и авансовых (12’’’) платежей:

$$Y_g^t = [(Y - g) \times (Y - g) / (1 + Y)]^{0,5} = (Y - g) / (1 + Y)^{0,5}.$$

Точное выражение (12’’’’) также отличается от приближенного выражения (16’’) для долгосрочных договоров с платежами на середину года, полученного в [1] как среднеарифметическое значение соответствующих ставок для «обычных» и авансовых платежей.

Обобщая полученные результаты, сведем для удобства использования все уточненные выражения в таблицу.

Расчетные соотношения для ставки текущей доходности Y^t при расчете рыночной арендной платы за первый год договора (проекта договора) аренды

Вид платежа	***Ситуация***		
	платежи в течение договора аренды и стоимость земли постоянные (теоретическая модель), Y_0^t	*платежи в течение договора аренды постоянные, стоимость земли растет со среднегодовым темпом g, Y_{0g}^t*	*платежи индексируются в течение договора аренды пропорционально стоимости земли, растущей со среднегодовым темпом g, Y_g^t*
в конце года	Y	$Y \times \{1 - [1 - (1 + g)^n] / [1 - (1+Y)^n]\}$	$Y - g$
авансовый	$Y / (1 + Y)$	$[Y / (1 + Y)] \times \{1 - [1 - (1 + g)^n] / [1 - (1 + Y)^n]\}$	$(Y - g) / (1 + Y)$
в середине года	$Y / (1 + Y)^{0,5}$	$[Y / (1 + Y)^{0,5}] \times \{1 - [1 - (1 + g)^n] / [1 - (1 + Y)^n]\}$	$(Y - g) / (1 + Y)^{0,5}$

Напомним в заключение, что представленные выражения отражают лишь доходную часть арендной платы и не включают издержки арендодателя, связанные с содержанием земельного участка (например налоги). Подобные издержки подлежат дополнительному учету.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баринов Н. П.* Об оценке рыночной арендной платы и стоимости прав, связанных с договором аренды земельного участка // Имущественные отношения в Российской Федерации. 2018. № 6(201). С. 6–24. URL: http://sroroo.ru/evaluators/bank/648/665/