

## Метод «парных продаж». Границы применимости.

*Изучены границы корректного применения часто используемого в оценочной деятельности метода «парных продаж». Делается попытка описания области применимости этого метода с математических позиций. Полученные результаты иллюстрируются на примерах.*

Существенный интерес, на наш взгляд, представляет определение границ корректного применения метода «парных продаж», часто используемого на практике в рамках сравнительного подхода.

В этом методе сравниваются пары объектов, очень близких по всем потребительским свойствам, кроме одного<sup>2</sup>, и вычисляется разница цен этих объектов. Отличие в потребительских свойствах товара объясняется наблюдаемой разницей цен. Далее эта разница, называемая также поправкой, используется для получения оценки стоимости интересующего нас объекта по известной цене аналога.

Таким образом, в методе используется неявное допущение, что ничем не отличающиеся объекты имеют одну цену («one price law» — закон единой цены). Однако известно [3], что на реальных рынках многие одинаковые товары продаются по разным ценам<sup>3</sup>. То есть цена объекта включает составляющую, которая может быть связана со свойствами объекта, и случайную (иррациональную) составляющую, независимую от этих свойств.

Какое влияние может оказать это обстоятельство на результаты, полученные методом «парных продаж»?

---

<sup>1</sup> Автор выражает признательность М.А. Зельдину и Н.П. Баринову за помощь в постановке задачи и ценные замечания в процессе обсуждения работы

<sup>2</sup> В многомерном обобщении метода число различающихся свойств может быть более единицы.

<sup>3</sup> Этот разброс цен не является особенностью какой-либо стадии развития рынка или национальной особенностью. Еще более яркие разбросы цен на одинаковые товары в США приводятся в [1] со ссылкой на [5].

Рассмотрим пример. Выберем на сайте Яндекс-Маркет два товара «Apple iPhone 5 16Gb, black»<sup>4</sup> и «Apple iPhone 5 32Gb, black»<sup>5</sup>, отличающиеся только объемом встроенной памяти. По первому объекту выявлено 32 цены, для второго - 17.

По каждой из этих двух выборок<sup>6</sup> вычислены значения следующих выборочных статистик<sup>7</sup> (табл.1):

Таблица 1

<i>Выборочные статистики для Apple iPhone 5, 16Gb, black,</i>		<i>Выборочные статистики для Apple iPhone 5, 32Gb, black,</i>	
Среднее	<b>40 339</b>	Среднее	<b>48 980</b>
Медиана	38 700	Медиана	48 700
Мода	38 700	Мода	44 400
Стандартное отклонение	3 747	Стандартное отклонение	5 440
Интервал	12 661	Интервал	18 000
Минимум	37 489	Минимум	42 300
Максимум	50 150	Максимум	60 300
Счет	32	Счет	17
Уровень надежности (95%)	1 351	Уровень надежности (95%)	2 797
Коэффициент осцилляции	<b>31,4%</b>	Коэффициент осцилляции	<b>36,7%</b>
Коэффициент вариации	9,3%	Коэффициент вариации	11,1%

Как видим, в первом случае коэффициент осцилляции равен около **31%**, для второго товара — **37%**. Еще раз отметим — этот существенный разброс не связан с потребительскими свойствами самих товаров.

Предположим, что разница цен на «Apple iPhone 5, 16Gb, black» и «Apple iPhone 5, 32Gb, black» нужна для получения оценки стоимости «Apple iPhone 4S, 32Gb, black» путем корректировки по фактору

<sup>4</sup>Мобильные телефоны [Электронный ресурс] // Яндекс маркет <http://market.yandex.ru/offers.xml?&modelid=8454852&hid=91491&hyperid=8454852&grhow=shop&offer-shipping=delivery&deliveryincluded=1&how=aprice&np=1> Информация о ценах в Санкт-Петербурге с учетом доставки по состоянию на 03.10.2012.

<sup>5</sup> Там же <http://market.yandex.ru/offers.xml?modelid=8454904&hid=91491&hyperid=8454904&grhow=shop&offer-shipping=delivery&deliveryincluded=1&how=aprice&np=1>.

<sup>6</sup> См. Приложение 1.

<sup>7</sup> Все значения, кроме коэффициентов осцилляции и вариации, вычислены с помощью стандартных средств пакета анализа Excel – *Анализ данных / Описательная статистика*. Дополнительно посчитаны: коэффициент осцилляции - как отношение интервала к среднему, коэффициент вариации - как отношение стандартного отклонения к среднему.

«внутренняя память» известной цены Apple iPhone 4S, 16Gb, black (25790 руб.)<sup>8</sup>.

На практике при применении метода «парных продаж» мы наблюдаем какую-то одну пару цен, причем неизвестно какую именно. И у нас нет рыночной информации для того, чтобы понять, взята ли каждая цена из левого края интервала распределения или из правого, насколько она близка к краям и т.д. Но от того, какая именно пара цен используется для расчета корректировки, зависит и величина корректировки, и результат оценки стоимости.

Рассмотрим все возможные пары цен (всего их  $17 \cdot 32 = 544$ ) и определим множество возможных значений поправки (разностей цен), а также коэффициент осцилляции поправки (табл.2):

Таблица 2

<i>Выборочные статистики для значений поправки по всему множеству</i>	
Среднее	8 641
Медиана	7 900
Мода	10 000
Стандартное отклонение	6 444
Интервал	30 661
Минимум	-7 850
Максимум	22 811
Счет	544
Уровень надежности(95,0%)	543
Коэффициент осцилляции	<b>355%</b>
Коэффициент вариации	75%

Из 544 полученных пар для 51 пары, то есть примерно в 10% случаев, знак поправок оказался неверным (цена «Apple iPhone 5 16Gb, black» выше цены «Apple iPhone 5 32Gb, black»). Отсекая подобные

<sup>8</sup> Это число получено как сумма средней цены за телефон (25490 руб.) на сайте яндекс-маркет (<http://market.yandex.ru/model.xml?modelid=7717706&hid=91491&suggest=1>) на 09.10.2012 и средней цены доставки товара по Санкт-Петербургу (300 руб.).

поправки из экономических соображений<sup>9</sup>, по остальным 493 парам получим:

Таблица 3

<i>Выборочные статистики для значений поправки по положительным элементам множества</i>	
Среднее	9 884
Медиана	9 400
Мода	10 000
Стандартное отклонение	5 405
Интервал	22 501
Минимум	310
Максимум	22 811
Счет	492
Уровень надежности(95,0%)	479
Коэффициент осцилляции	<b>228%</b>
Коэффициент вариации	55%

Таким образом, значение поправки в зависимости от наблюдаемой пары цен может меняться от 310 до 22811 при среднем значении 9884, то есть коэффициент осцилляции равен **228%**.

Если применять эту корректировку к средней цене «Apple iPhone 4S, 16Gb, black», составляющей 25 790 руб., то получим, что поправленная цена может меняться от 26 100 до 48 601 руб., то есть более чем в 1,8 раз. На практике считается приемлемым, если коэффициент осцилляции (возможный разброс) поправки не превышает 15-20%.

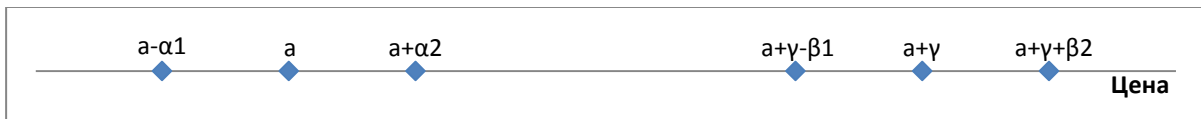
Сделаем попытку выяснить, при каких условиях метод парных продаж может обеспечить получение поправки с такой «точностью». В этих целях рассмотрим математическую постановку задачи.

Пусть у нас имеется два товара, причем средняя цена на первый товар равна  $a$ , а цены на него распределены (варьируют) в отрезке  $[a - \alpha_1; a + \alpha_2]$ .

<sup>9</sup> В среднем, более предпочтительный с потребительской точки зрения товар не должен стоить дешевле менее предпочтительного товара. Следует отметить, что подобное «отсекание» не всегда столь очевидно и, следовательно, используя метод парных продаж, нельзя исключить получения неверного знака поправки.

Средняя цена на второй товар равна  $b = a + \gamma$ , а цены на него распределены в отрезке  $[a + \gamma - \beta_1; a + \gamma + \beta_2]$ . Без ограничения общности можем считать, что разница средних цен  $\gamma \geq 0$ , так как при  $\gamma < 0$  товары меняются местами на ценовой оси, и все выводы остаются справедливыми по отношению к новой расстановке.

**Случай 1.** Отрезки варьирования цен на товары не пересекаются, то есть,  $\gamma > \alpha_2 + \beta_1$ . Иными словами, разница значений, соответствующих средним точкам интервалов варьирования цен, больше, чем сумма полуинтервалов.



**Рис.1** Числовая ось в случае непересекающихся интервалов варьирования цен

Тогда минимальная возможная поправка равна  $a + \gamma - \beta_1 - (a + \alpha_2) = \gamma - \beta_1 - \alpha_2$ , а максимальная  $a + \gamma + \beta_2 - (a - \alpha_1) = \gamma + \beta_2 + \alpha_1$ , и интервал, в пределах которого может изменяться поправка будет равен

$$\gamma + \beta_2 + \alpha_1 - (\gamma - \beta_1 - \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2.$$

Таким образом, интервал варьирования поправки в этом случае равен сумме интервалов изменения (варьирования) цен на товары.

Если бы мы наблюдали всю информацию на рынке, то имели бы возможность посчитать средние цены на товары. Тогда, вычислив разницу этих средних цен, мы получили бы «истинное» значение поправки, равное  $\gamma$ . Примем следующие обозначения:  $\zeta$  - коэффициент осцилляции поправки,  $\eta_1$  — коэффициент осцилляции для распределения цен на первый товар,  $\eta_2$  - коэффициент осцилляции для распределения цен на второй товар, то есть

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{a}, \quad \eta_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{a + \gamma}.$$

Тогда для коэффициента осцилляции поправки (относительного разброса ее оценки) получим:

$$\zeta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2}{\gamma} = \frac{\eta_1 a}{\gamma} + \frac{\eta_2 (a + \gamma)}{\gamma} = \frac{a}{\gamma} (\eta_1 + \eta_2) + \eta_2. \quad (1)$$

Отношение  $\gamma/a$  показывает, на сколько средние цены двух товаров отличаются друг от друга (в долях или процентах от меньшей из них):

$$\frac{(a + \gamma) - a}{a} = \frac{\gamma}{a}.$$

Ниже приведены таблица значений для коэффициента осцилляции поправки  $\zeta$  в зависимости от значений коэффициентов осцилляции цен и их относительного различия -  $\eta_1, \eta_2, \gamma/a$ .

Таблица 4.

**Коэффициент осцилляции поправки в случае непересекающихся интервалов варьирования цен аналогов<sup>10</sup>**

Средние цены отличаются в полтора раза $\gamma/a = 0.5$							Средние цены отличаются в два раза $\gamma/a = 1$								
		$\eta_1$	5%	10%	15%	20%	25%			$\eta_1$	5%	10%	15%	20%	25%
$\eta_2$	5%	5%	25,0%	35,0%	45,0%	55,0%	65,0%	$\eta_2$	5%	5%	15,0%	20,0%	25,0%	30,0%	35,0%
	10%	10%	40,0%	50,0%	60,0%	70,0%	80,0%		10%	10%	25,0%	30,0%	35,0%	40,0%	45,0%
	15%	15%	55,0%	65,0%	75,0%	85,0%	95,0%		15%	15%	35,0%	40,0%	45,0%	50,0%	55,0%
	20%	20%	70,0%	80,0%	90,0%	100,0%	110,0%		20%	20%	45,0%	50,0%	55,0%	60,0%	65,0%
	25%	25%	85,0%	95,0%	105,0%	115,0%	125,0%		25%	25%	55,0%	60,0%	65,0%	70,0%	75,0%

Средние цены отличаются в три раза $\gamma/a = 2$							Средние цены отличаются в семь раз $\gamma/a = 6$								
		$\eta_1$	5%	10%	15%	20%	25%			$\eta_1$	5%	10%	15%	20%	25%
$\eta_2$	5%	5%	10,0%	12,5%	15,0%	17,5%	20,0%	$\eta_2$	5%	5%	6,7%	7,5%	8,3%	9,2%	10,0%
	10%	10%	17,5%	20,0%	22,5%	25,0%	27,5%		10%	10%	12,5%	13,3%	14,2%	15,0%	15,8%
	15%	15%	25,0%	27,5%	30,0%	32,5%	35,0%		15%	15%	18,3%	19,2%	20,0%	20,8%	21,7%
	20%	20%	32,5%	35,0%	37,5%	40,0%	42,5%		20%	20%	24,2%	25,0%	25,8%	26,7%	27,5%
	25%	25%	40,0%	42,5%	45,0%	47,5%	50,0%		25%	25%	30,0%	30,8%	31,7%	32,5%	33,3%

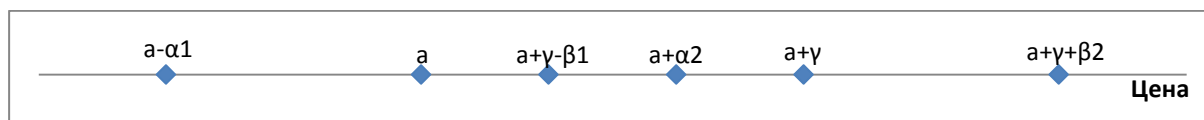
<sup>10</sup> Цветом выделены ячейки с «приемлемыми» (до 20% включительно) значениями коэффициентов осцилляции, поправки при допустимых значениях (до 15% включительно) коэффициента осцилляции цен.

Таким образом, для того, чтобы коэффициент осцилляции поправки не превышал 20% при возможных коэффициентах осцилляции  $\eta_1, \eta_2$  цен аналогов на рынке до 15% включительно, необходимо, чтобы средние цены сравниваемых аналогов отличались не менее чем в 7 (!) раз.

Это условие совершенно не согласуется с требованиями к аналогам, используемым для расчета методами количественных корректировок и «парных продаж»<sup>11</sup>.

А при близкой к реальности *полutorной разнице* в средних ценах товаров мы можем уложиться в требуемую «точность» определения поправки 20% только при разбросе цен аналогов на рынке, меньшем 5%. Таких товаров на рынке встречается очень мало (около 4% согласно [3]).

**Случай 2.** Отрезки варьирования цен на товары пересекаются, то есть,  $\gamma < \alpha_2 + \beta_1$ .



**Рис.2** Числовая ось в случае пересекающихся интервалов варьирования цен

Здесь минимально возможное значение поправки принимается равным нулю, так как из экономических соображений (см. пример выше) мы не рассматриваем отрицательные значения поправки, а максимальное -  $a + \gamma + \beta_2 - (a - \alpha_1) = \gamma + \beta_2 + \alpha_1$ . Интервал, в пределах которого может изменяться поправка, численно равен этому максимальному значению.

Выражение для коэффициента осцилляции поправки в этом случае имеет вид:

<sup>11</sup> Известно требование некоторых крупных заказчиков, чтобы цены аналогов не различались более чем на 20-25%.

$$\zeta = \frac{\gamma + \beta_2 + \alpha_1}{\gamma} = 1 + \frac{\beta_2 + \alpha_1}{\gamma} \quad (2)$$

Иллюстрируя этот результат, рассмотрим частный случай  $\beta_2 = \alpha_2$ . Тогда, сохранив обозначения из предыдущего случая, можем записать для коэффициента осцилляции поправки

$$\zeta = 1 + \frac{\beta_2 + \alpha_1}{\gamma} = 1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\gamma} = 1 + \eta_1 \frac{a}{\gamma}$$

Таблица 5

**Коэффициент осцилляции поправки в случае пересекающихся интервалов**

Средние цены отличаются в раз		1,5	2	3	10
η1	5%	110,0%	105,0%	102,5%	100,6%
	10%	120,0%	110,0%	105,0%	101,1%
	15%	130,0%	115,0%	107,5%	101,7%
	20%	140,0%	120,0%	110,0%	102,2%
	25%	150,0%	125,0%	112,5%	102,8%

То есть, коэффициент осцилляции поправки  $\zeta$  при пересечении интервалов варьирования (разброса) цен аналогов никогда не может быть менее 100%, что видно непосредственно из общей формулы (2).

Это означает, что если интервалы варьирования цен аналогов пересекаются метод «парных продаж», в отличие от случая непересекающихся интервалов<sup>12</sup>, заведомо неприменим.

<sup>12</sup> Покажем, как отличить эти два случая, приняв допущение о симметричном распределении цен относительно средних ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ). Пусть цены на товары отличаются в  $k$  раз, то есть  $\frac{a + \gamma}{a} = 1 + \frac{\gamma}{a} = k$ , тогда интервалы не пересекаются, если выполнено условие  $a \frac{\eta_1}{2} + ak \frac{\eta_2}{2} \leq a(k - 1)$ , означающее, что разница средних цен на товары должна быть больше суммы полуинтервалов варьирования цен на них.

Поэтому, в случае 1 должно быть:  $\eta_1 + k\eta_2 \leq 2(k - 1)$ .

Если  $\eta_1 = \eta_2$  то полученное условие трансформируется в выражение вида:  $\eta_1 \leq 2 \frac{k - 1}{k + 1}$ .

Для случая 2 аналогично получаем:  $\eta_1 + k\eta_2 > 2(k - 1)$ , при  $\eta_1 \neq \eta_2$ ,

$$\eta_1 > 2 \frac{k - 1}{k + 1}, \quad \text{при } \eta_1 = \eta_2.$$



## Метод «матричной алгебры»

Перейдем теперь к многофакторному обобщению метода «парных продаж» - методу «матричной алгебры» [2]. Здесь аналоги могут отличаться более чем одним фактором, и для расчета корректировок и самой оценки стоимости составляется система линейных уравнений. И этот метод неявно базируется на законе единой цены (предполагается, что иррациональная составляющая в ценах равна нулю), а также на предположении об аддитивной модели ценообразования<sup>13</sup>.

Упрощенный пример<sup>14</sup> применения метода матричной алгебры приведен в монографии С.В. Пупенцовой [4, с. 24-25]. Более общий пример<sup>15</sup> использования данного метода можно найти в монографии С.В. Грибовского [2, с. 216-220]. Воспользуемся этими примерами для иллюстрации разброса оценки стоимости объекта при возможном разбросе цен аналогов. В результате расчетов<sup>16</sup> оказалось, что разброс оценки стоимости в первом примере примерно в 7 раз, а во втором — примерно в 2 раза больше разброса цен аналогов.

Заметим, что соотношение разброса оценки стоимости и цен получено в предположении о правильной спецификации модели, то есть верном выявлении всех ценообразующих факторов, а также линейной зависимости стоимости от них. Т.е., полученные разбросы оценки являются минимальными. В реальности они всегда будут больше, так как добавляется ошибка, связанная с неверной спецификацией модели — выбора числа и состава факторов и вида влияющих зависимостей (оцифровка уровней факторов). И здесь, в отличие от регрессии, у нас нет

---

<sup>13</sup> То есть предполагается, что стоимость объекта складывается из ценности различных его потребительских свойств (гедонистическая модель ценообразования).

<sup>14</sup> Аналоги подобраны так, что всегда находится пара аналогов, отличающихся значением только одного фактора.

<sup>15</sup> Пары аналогов могут различаться значениями более чем по одному фактору.

<sup>16</sup> См. Приложение 2.

практической возможности проверить значимость факторов модели и вид зависимости.

Попробуем получить формулу, связывающую разброс оценки стоимости объекта с разбросом цен аналогов.

Пусть мы наблюдаем  $n$  объектов-аналогов с  $n-1$  ценообразующими факторами<sup>17</sup>.

Согласно [2] оценка стоимости  $V_0$  может быть найдена из выражения<sup>18</sup>

$$V_0 = aV = a\Delta X^{-1}P, \quad (3)$$

где  $\Delta X_{n \times n}$  — матрица сравнения уровней ценообразующих факторов аналогов и объекта оценки размерности  $n \times n$ . Каждая строка матрицы соответствует одному из аналогов, а каждый столбец, кроме первого<sup>19</sup> — одному из факторов. Элемент на пересечении  $i$ -ой строки ( $i=1, \dots, n$ ) и  $j$ -го столбца ( $j=2, \dots, n$ ) вычисляется как разность между уровнями  $j$ -го фактора у  $i$ -ого аналога и объекта оценки;

$V = (V_0, \Delta P_1, \dots, \Delta P_{n-1})^T$  — вектор-столбец, первым элементом которого является искомая оценка стоимости, а  $j$ -ый элемент ( $j=2, \dots, n$ ) есть вес в денежных единицах (рублях), показывающий, на сколько изменяется оценка стоимости при изменении значения  $j$ -го фактора на единицу в соответствующей шкале;

$P = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$  - вектор-столбец размерности  $n$ , состоящий из цен аналогов;

---

<sup>17</sup> Превышение числа аналогов над числом влияющих факторов ровно на единицу – основное условие применения метода «матричной алгебры».

<sup>18</sup> Здесь и далее используется обозначения, принятые в [4].

<sup>19</sup> Первый столбец состоит из единиц

$a = \left( 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} \right)$  — вспомогательный вектор-строка размерности  $n$ .

Пусть теперь  $|\Delta X^{-1}|$  — матрица, элементы которой получены путём взятия абсолютного значения элементов матрицы  $\Delta X^{-1}$ . Введем параметр

$$\theta = \frac{a|\Delta X^{-1}|P}{a\Delta X^{-1}P} = \frac{a|\Delta X^{-1}|P}{V_0}.$$

Тогда верно равенство

$$k_{оценки} = \theta * k_{цен}, \quad (4)$$

где  $k_{оценки}$  — коэффициент осцилляции оценки стоимости,

$k_{цен}$  — коэффициент осцилляции цен аналогов<sup>20</sup>.

Формула (4) дает возможность предсказывать, во сколько раз коэффициент осцилляции оценки будет превышать коэффициент осцилляции цен аналогов.

С помощью пакета MS Excel этот параметр «точности» метода «матричной алгебры» можно рассчитать так:

1. Составляем матрицу  $\Delta X$  и вектор  $P$ .
2. С помощью функции МОБР() находим матрицу  $\Delta X^{-1}$ .
3. Т.к. произведение  $a\Delta X^{-1}$  представляет собой первую строку матрицы  $\Delta X^{-1}$ , умножаем первую строку этой матрицы на вектор-столбец  $P$  с помощью функции МУМНОЖ() и получаем в результате искомую оценку  $V_0$ .
4. Берем модуль каждого элемента первой строки матрицы  $\Delta X^{-1}$ , используя функцию ABS(), и формируем из этих значений вектор-строку модулей.

---

<sup>20</sup> Подробный вывод этой формулы см. в Приложении 3.

5. Порученную вектор-строку модулей умножаем на вектор-столбец  $P$  с помощью функции МУМНОЖ() и получаем значение числителя  $\hat{\theta} = a|\Delta X^{-1}|P$  выражения для  $\theta$ .
6. Находим  $\theta = \hat{\theta}/V_0$  как отношение результатов шагов 5 и 3.
7. По заданному (предполагаемому) коэффициенту осцилляции цен аналогов получаем оценку снизу для «точности» расчета по формуле (4) и сравниваем ее с допустимым значением.

Таким образом, следует сделать вывод о том, что метод «парных продаж» и его многомерное обобщение — метод «матричной алгебры», неявно базируются на предположении о действии «закона единой цены»<sup>21</sup>. На реальных же рынках действие этого закона не подтверждается, цены на товары могут иметь значительный разброс. Поэтому практическое применение этих методов может приводить к неудовлетворительным результатам оценки стоимости.

В методе «парных продаж» при пересекающихся интервалах разброса цен аналогов неопределенность рассчитываемой поправки к цене превышает 100%, поэтому применение метода в таких случаях нельзя признать корректным. Но именно такая ситуация встречается на практике в большинстве случаев — при оценке влияния на стоимость небольших отличий в аналогах.

С практической точки зрения применение метода «парных продаж» в оценке оправдано лишь в случае, когда интервалы разброса цен на товары не пересекаются, а их величины существенно (на порядок) меньше разности средних цен на товары.

Например, при допустимой неопределенности (ошибке определения) поправки  $\pm 10\%$  (коэффициент осцилляции — 20%) и в

---

<sup>21</sup> В наших терминах этот закон означает, что коэффициент осцилляции цен равен нулю.

предположении о коэффициенте осцилляции цен аналогов - 15%, метод «парных продаж» можно корректно применять, если средние цены сравниваемых аналогов отличаются в 7 раз.

Для метода «матричной алгебры» – многомерного обобщения метода «парных продаж» – получено выражение, позволяющее связать разброс (интервал неопределенности) оценки стоимости с наблюдаемым на рынке разбросом цен аналогов. На двух примерах показано, что разброс оценки стоимости может в 2-7 раз превышать разброс цен аналогов. При ожидаемых разбросах цен на рынке порядка  $\pm 15\%$  разброс оценки стоимости может составлять  $\pm 30-105\%$ .

Следует также подчеркнуть, что полученные для метода «матричной алгебры» оценки «точности», мы можем применять только тогда, когда уверены в правильной спецификации модели (наборе влияющих факторов и оцифровке их уровней). В большинстве практических случаев, когда такой уверенности нет, эти оценки будут оценками снизу (минимально возможными), так как возникает еще и ошибка, связанная с неправильной спецификацией модели.

## Литература

1. Акерлоф Дж., Шиллер Р. Spiritus Animalis, или как человеческая психология управляет экономикой и почему это важно для мирового капитализма/ Пер. с англ., М.: ООО «Юнайтед Пресс», 2010. - 273 с.
2. Грибовский С. В., Сивец С. А. Математические методы оценки стоимости недвижимого имущества. Финансы и статистика, 2008 г.-368с.
3. Зельдин М.С., Баринов Н.П., Аббасов М.Э. Как распределены цены на рынке гомогенных товаров? Регистр оценщиков, №11, 2012, с. 66-69  
(URL: [http://www.avg.ru/prensa/pdf/prices\\_gom\\_tov.pdf](http://www.avg.ru/prensa/pdf/prices_gom_tov.pdf))

4. Пупенцова С.В., Модели и инструменты в экономической оценке инвестиций. СПб: Изд-во «МКС», 2007 г.
5. Pratt, John W & Wise, David A & Zeckhauser, Richard, Price Differences in Almost Competitive Markets, The Quarterly Journal of Economics, MIT Press, vol. 93(2), pages 189-211, 1979.

## Приложение 1

Цены на «Apple iPhone 5 16Gb, black» и «Apple iPhone 5 32Gb, black» с учетом доставки по Санкт-Петербургу по состоянию на 03 октября 2012 на яндекс-маркете.

### Apple iPhone 5 16Gb, black

1	37489
2	37590
3	37650
4	37740
5	37800
6	37900
7	38000
8	38100
9	38145
10	38150
11	38190
12	38249
13	38290
14	38300
15	38399
16	38700
17	38700
18	38739
19	39000
20	39180
21	39190
22	39900
23	39900
24	39999
25	40300
26	41990
27	45150
28	45240
29	47290
30	50150
31	47290
32	50150

### Apple iPhone 5 32Gb, black

1	42300
2	43930
3	43950
4	43999
5	44400
6	44400
7	44690
8	48100
9	48700
10	49180
11	49190
12	49700
13	51990
14	54250
15	55290
16	58290
17	60300

## Приложение 2

Пример из монографии С.В. Пупенцовой [4].

Параметры сравнения	Объект оценки	Объекты-аналоги								
		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Ставка аренды, д.е./кв.м.мес	?	22	27	25	30	32	26	28	20	35
Удаленность от метро	до 5 мин.	более 5	до 5 мин.	более 5	до 5 мин.	до 5 мин.	более 5	до 5 мин.	более 5	до 5 мин.
Сост. внутр. отделки	Отличн.	Хорош	Хорош.	Хорош	Отличн.	Отличн.	Хорош.	Хорош.	Хорош	Отличн.
Сост.осн.конструкт.эл-тов	Хорош.	Хорош	Отлич.	Отлич.	Отлич.	Отлич.	Отлич.	Отлич.	Хорош	Отлич.
Наличие кафе	нет	нет	нет	нет	нет	есть	нет	нет	нет	есть
Универсальность планировки	высокая	средняя	средняя	средняя	средняя	средняя	средняя	средняя	средняя	высокая
Налич.системы безопасности	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	нет	есть
Парковка	затруд.	затруд.	свобод.	затруд.	свобод.	свобод.	свобод.	свобод.	затруд.	свобод.
Конференц-зал	нет	нет	нет	нет	есть	есть	нет	есть	нет	есть

Как видим, для каждого параметра сравнения (фактора) можно найти два объекта-аналога, отличающиеся только этим параметром. Поэтому можем вычислить поправки:

Параметр	"Парные" аналоги	Абсолют. корректировка	Корректируемый аналог
Удаленность от метро	A2, A6	27-26 = 1	A6
Сост. внутренней отделки	A4, A7	30-28 = 2	A7
Состояние основных конструктивных элементов	A1, A3	22-25 = -3	A3
Наличие кафе	A4, A5	30-32 = -2	A5
Универсальность планировки	A5, A9	35-32 = 3	A5
Наличие системы безопасности	A1, A8	22-20 = 2	A8
Парковка	A6, A3	25-26 = -1	A6
Конференц-зал	A2, A7	27-28 = -1	A7

Тогда окончательно получаем:

Параметры сравнения	Объект оценки	Объекты-аналоги								
		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Ставка аренды, д.е./кв.м.мес	?	22	27	25	30	32	26	28	20	35
<b>Абсолютные корректировки</b>										
Удаленность от метро	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Сост. внутр. отделки	0	2	2	2	0	0	2	2	2	0
Сост.осн.конструкт.эл-тов	0	0	-3	-3	-3	-3	-3	-3	0	-3
Наличие кафе	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2
Универсальность планировки	0	3	3	3	3	3	3	3	3	0
Налич.системы безопасности	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
Парковка	0	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	0	-1
Конференц-зал	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	-1
Общая корректировка	0	6	1	3	-2	-4	2	0	8	-7
Скорректированная ставка		22+6=28	27+1=28	25+3=28	30-2=28	32-4=28	26+2=28	28+0=28	20+8=28	35-7=28
Ставка для объекта оценки	<b>28</b>									



Для оценки устойчивости этого метода к разбросу цен (арендных ставок) аналогов, изменяя каждую из них (каждый элемент строки «Ставка аренды, д.е./кв.м.мес») на фиксированное число процентов в большую и меньшую сторону и оставляя ее без изменений, получим  $3^9 = 19683$  возможных комбинаций цен. Задавшись уровнями разброса цен в 5%, 10%, 15%, получим 3 набора по 19683 комбинаций. Для каждой комбинации цен в наборе построена оценка, затем по всем полученным оценкам вычислено среднее (совпадающее со значением на комбинации из исходных цен, равное 28), минимальное и максимальное значение. Затем подсчитано относительное отклонение минимальной и максимальной оценки от ее среднего при заданном уровне разброса цен аналогов:

**Коэффициент осцилляции оценки стоимости для примера из [4]**

Разброс цен аналогов относительно исходного значения	<b>±5%</b>	<b>±10%</b>	<b>±15%</b>
Отклонение минимальной оценки стоимости от средней	-36%	-71%	-107%
Отклонение максимальной оценки стоимости от средней	36%	71%	107%

Как видим, отклонение оценки стоимости (минимальной или максимальной) превосходит разброс цен аналогов примерно в 7 раз.

Получим этот же результат с помощью формулы (4). Для этого нужно сформировать матрицу  $\Delta X$  и вектор  $P$ . Отметим, что по каждому фактору у нас всего две градации<sup>22</sup>, поэтому промежуточная таблица, необходимая для составления матрицы  $\Delta X$  имеет вид:

Параметры сравнения	Объект оценки	Объекты-аналоги								
		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Ставка аренды, д.е./кв.м.мес	?	22	27	25	30	32	26	28	20	35
<b>Абсолютные корректировки</b>										
Удаленность от метро	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
Сост. внутр. отделки	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
Сост. осн. конструкт. эл-тов	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Наличие кафе	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

<sup>22</sup> По фактору «удаленность от метро» — градации «до 5 мин.», «более 5 мин.»; по факторам «Сост. внутр. отделки» и «Сост. осн. конструкт. эл-тов» — градации «отличное», «хорошее»; по фактору «Универсальность планировки» — «высокая», «средняя»; по фактору «Парковка» — «затруднительно», «свободная»; по факторам «Наличие кафе», «Налич. системы безопасности», «Конференц. зал» — «есть», «нет».

Универсальность планировки	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Налич.системы безопасности	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Парковка	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
Конференц-зал	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1

Здесь ноль соответствует «негативному» (в смысле влияния на ставку аренды) значению, а единица «позитивному» (в том же смысле) значению фактора. Вычитая в этой таблице из  $i$ -ого столбца абсолютных корректировок (  $i = 2, \dots, 10$  ) первый, получим 9 новых столбцов, характеризующих разность между уровнями соответствующих факторов у  $i-1$ -ого аналога и объекта оценки. Дополняя эти столбцы сверху строкой, состоящей из единиц, получим матрицу  $\Delta X^T$ :

$$\Delta X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Откуда имеем

$$\Delta X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ясно также, что } P = \begin{pmatrix} 22 \\ 27 \\ 25 \\ 30 \\ 32 \\ 26 \\ 28 \\ 20 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

1. Вычисляем  $\Delta X^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2. Рассчитываем оценку  $V_0 = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 22 \\ 27 \\ 25 \\ 30 \\ 32 \\ 26 \\ 28 \\ 20 \\ 35 \end{pmatrix} = 28,$

3. Формируем вектор-строку, составленную из модулей элементов первой строки матрицы  $\Delta X^{-1}$ , получаем  $(1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1),$

4. Рассчитываем  $\hat{\theta} = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 22 \\ 27 \\ 25 \\ 30 \\ 32 \\ 26 \\ 28 \\ 20 \\ 35 \end{pmatrix} = 200,$

5. Окончательно получаем  $\theta = \hat{\theta} / V_0 = 200 / 28 \approx 7,1.$

Что совпадает с результатом, полученным прямым перебором.

Пример, приведенный в монографии С.В. Грибовского [2].

Наименование объекта	Местоположение объекта	Отделка внутренних помещений	Площадь торгового зала, кв. м	Общая площадь, кв. м	Наличие парковки	Цена 1 кв. м, у.е.
Объект оценки	Центр города, район с высоким постоянным потоком пешеходов и транспорта, плотная жилая застройка	Улучшенная	151	233	Есть	
Аналог 1.	Магистраль городского значения, прохождение маршрутов отдельных видов общественного транспорта, социально-бытовая инфраструктура ограничена	Простая	180	340	Нет	590
Аналог 2.	Центр города, район с высоким постоянным потоком пешеходов и транспорта, плотная жилая застройка	Простая	135	199	Нет	1560
Аналог 3.	Центр города, район расположения крупных торговых и социально-культурных комплексов, центр развязки крупнейшего транспортного узла города	Высококачественная	110	164	Есть	2900
Аналог 4.	Центр города, район расположения крупных торговых и социально-культурных комплексов, отличная транспортная и пешеходная доступность,	Улучшенная	136	194	Есть	2350
Аналог 5.	Магистраль городского значения, прохождение маршрутов отдельных видов общественного транспорта расположение в непосредственной близости от рынка, значительный поток пешеходов	Улучшенная	130	181	Нет	1650

На основании этих данных в [2] строится таблица оцифровки уровней ценообразующих факторов

Наименование объекта	Оценка местоположения и ближайшего окружения	Уровень внутренней отделки	Наличие парковки	Доля площади торгового зала в общей площади	Цена 1 кв. м, у.е.
Объект оценки	5	4	1	0,65	
Аналог 1.	1	1	0	0,53	890
Аналог 2.	5	1	0	0,68	1560
Аналог 3.	8	8	1	0,67	2900
Аналог 4.	7	4	1	0,7	2350
Аналог 5.	3	4	0	0,72	1650

На основе оцифрованных данных формируется матрица  $\Delta X$  (первым элементом  $i$ -ой строки матрицы является единица, а остальные элементы строки являются разностями уровней ценообразующих факторов  $i$ -ого аналога и объекта оценки), и вектор цен  $P$

$$\Delta X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -1 & -0,12 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 0,03 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0,02 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0,05 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0,07 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 890 \\ 1560 \\ 2900 \\ 2350 \\ 1650 \end{pmatrix}.$$

Тогда искомая оценка  $V_0 = a\Delta X^{-1}P = 2036$  (тут вспомогательный вектор-строка  $a = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ ). Используем в этом примере тот же подход к расчету отклонений оценки стоимости - перебора цен. В этом случае у нас 5 цен, поэтому всего получим  $3^5 = 243$  комбинации цен аналогов и следующие результаты:

**Коэффициент осцилляции оценки стоимости для примера из [2]**

Разброс цен аналогов относительно исходного значения	<b>±5%</b>	<b>±10%</b>	<b>±15%</b>
Отклонение минимальной оценки стоимости от средней	-11%	-22%	-32%
Отклонение максимальной оценки стоимости от средней	11%	22%	32%

Как видим, разброс (отклонения от среднего минимального и максимального значений) оценки стоимости превосходит разброс цен аналогов примерно в 2 раза.

Получим этот результат с помощью формулы (4).

1. По известной  $\Delta X$  вычисляем

$$\Delta X^{-1} = \begin{pmatrix} 0,40 & -0,55 & -0,11 & 1,11 & 0,15 \\ -0,09 & 0,32 & 0,17 & -0,17 & -0,23 \\ -0,01 & -0,09 & 0,17 & -0,17 & 0,10 \\ 0,29 & -1,32 & -0,77 & 1,77 & 0,03 \\ -4,15 & -1,89 & -4,53 & 4,53 & 6,04 \end{pmatrix}$$

2. Рассчитываем  $V_0 = (0,40 \ -0,55 \ -0,11 \ 1,11 \ 0,15) \begin{pmatrix} 890 \\ 1560 \\ 2900 \\ 2350 \\ 1650 \end{pmatrix} = 2035$

3. Формируем вектор-строку, составленную из модулей элементов первой строки матрицы  $\Delta X^{-1}$ , получаем (0,40 0,55 0,11 1,11 0,15)

4. Рассчитываем  $\hat{\theta} = (0,40 \ 0,55 \ 0,11 \ 1,11 \ 0,15) \begin{pmatrix} 890 \\ 1560 \\ 2900 \\ 2350 \\ 1650 \end{pmatrix} = 4389$

5. Окончательно  $\theta = \hat{\theta} / V_0 = 4389 / 2035 \approx 2,2$

Что также совпадает с результатом, полученным прямым перебором.

**Доказательство формулы (4).**

Обозначим  $\Delta P$  — возможную вариацию столбца цен  $P$ ,  $\Delta V$  — возможную вариацию столбца переменных  $V$ . Таким образом, если у нас цены могут изменяться на  $\pm \lambda_{цен} \%$ , то столбец  $\Delta P$  состоит из элементов вида: 0 либо  $\pm \lambda_{цен} P_i, i = 1, \dots, n$ .

Можем записать:

$$\Delta X * (V + \Delta V) = P + \Delta P,$$

$$\Delta X * V + \Delta X * \Delta V = P + \Delta P.$$

Но так как (см. (3))  $\Delta X * V = P$ , то получаем

$$\Delta X * \Delta V = \Delta P$$

$$\Delta V = \Delta X^{-1} * \Delta P$$

При этом изменение оценки есть значение первого элемента вектора-столбца  $\Delta V$ . Перебирая весь набор возможных значений  $\Delta P$ , ищем такое, которое дает максимальное значение первого элемента  $\Delta V$ , т.е. вариации оценки. Поделив полученное значение на исходную оценку, получим максимальную величину относительного разброса оценки стоимости при заданном уровне разброса цен.

Первый элемент вектора-столбца  $\Delta V$  есть произведение первой строки матрицы  $\Delta X^{-1}$  на вектор-столбец  $\Delta P$ . А так как  $\Delta P$  состоит из элементов вида  $\pm \lambda_{цен} P_i$ , либо нуля, то максимальное значение вариации оценки получается при умножении отрицательных значений первой строки  $\Delta X^{-1}$  на элементы вида  $-\lambda_{цен} P_i$ , а положительных — на  $+\lambda_{цен} P_i$  (то есть соответствующие элементы первой строки  $\Delta X^{-1}$  и столбца  $\Delta P$  должны иметь одинаковые знаки). Это равносильно перемножению строки, состоящей из абсолютных значений элементов первой строки матрицы

$\Delta X^{-1}$  на вектор-столбец  $\lambda_{цен} P$  (это вектор  $\Delta P$ , полностью состоящий из положительных элементов). В результате получаем  $a * |\Delta X^{-1}| P \lambda_{цен}$ . Истинная же оценка  $V_0 = aV = a\Delta X^{-1} P$ . Поэтому максимально возможная оценка отстоит от истинной на

$$\frac{a|\Delta X^{-1}|P}{a\Delta X^{-1}P} \lambda_{цен}.$$

Аналогичный вывод справедлив и для минимально возможной оценки: так как  $\Delta P$  состоит из элементов вида  $\pm \lambda_{цен} P_i$ , либо нуля, минимальное значение вариации оценки получается при умножении отрицательных значений первой строки  $\Delta X^{-1}$  на элементы вида  $+\lambda_{цен} P_i$ , а положительных — на  $-\lambda_{цен} P_i$  (то есть соответствующие элементы первой строки  $\Delta X^{-1}$  и столбца  $\Delta P$  должны иметь противоположные знаки). Это равносильно перемножению строки, состоящей из абсолютных значений элементов первой строки матрицы  $\Delta X^{-1}$  на вектор-столбец  $-\lambda_{цен} P$  (это вектор  $\Delta P$ , полностью состоящий из положительных элементов). В результате получаем  $-a * |\Delta X^{-1}| P \lambda_{цен}$ . Истинная же оценка  $V_0 = aV = a\Delta X^{-1} P$ . Поэтому минимально возможная оценка отстоит от истинной на

$$-\frac{a|\Delta X^{-1}|P}{a\Delta X^{-1}P} \lambda_{цен}.$$

В итоге коэффициент осцилляции оценки равен

$$\frac{a|\Delta X^{-1}|P}{a\Delta X^{-1}P} \lambda_{цен} - \left( -\frac{a|\Delta X^{-1}|P}{a\Delta X^{-1}P} \lambda_{цен} \right) = \frac{a|\Delta X^{-1}|P}{a\Delta X^{-1}P} 2\lambda_{цен}$$

Т.е., коэффициент осцилляции цен  $k_{цен} = 2\lambda_{цен}$ , поэтому обозначая коэффициент осцилляции оценки  $k_{оценки}$  получаем окончательно:



$$k_{оценки} = \frac{a|\Delta X^{-1}|P}{a\Delta X^{-1}P} * k_{цен} = \theta * k_{цен}.$$

Следует отметить, что  $|\theta| \geq 1$  всегда, т.к. числитель  $a|\Delta X^{-1}|P$  содержит только положительные слагаемые и не может быть меньше знаменателя  $a\Delta X^{-1}P$ , который может содержать отрицательные слагаемые.